et enfin

$$(6)\quad \begin{cases} F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) \\ \quad = \dfrac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma'-\alpha)}(-y)^{-\alpha} F_4\left(\alpha, \alpha+1-\gamma', \gamma, \alpha+1-\beta, \dfrac{x}{y}, \dfrac{1}{y}\right) \\ \qquad + \dfrac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma'-\beta)}(-y)^{-\beta} F_4\left(\beta, \beta+1-\gamma', \gamma, \beta+1-\alpha, \dfrac{x}{y}, \dfrac{1}{y}\right), \end{cases}$$

d'où l'on déduirait une formule analogue en permutant x avec y et γ avec γ'.

» Ces formules se démontrent facilement au moyen des équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions F_i, ou bien au moyen des expressions de ces fonctions par des intégrales définies (*Comptes rendus*, t. XC, p. 977). Quelques-unes d'entre elles, comme par exemple (2), s'obtiennent à l'aide des relations connues auxquelles satisfait la série F de Gauss. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur diverses tentatives de démonstration du théorème de Fermat*. Extrait d'une Lettre du **P. Pépin** à M. le Secrétaire perpétuel.

« Les *Comptes rendus* du 14 juin 1880 renferment une tentative de démonstration du dernier théorème de Fermat, sur laquelle Libri a prononcé depuis longtemps un jugement qu'il n'est peut-être pas inutile de rappeler. Dans son Mémoire *Sur la théorie des nombres*, qui fait partie du Tome IX du *Journal de Crelle*, après avoir démontré que le nombre des solutions des congruences

$$x^3 + y^3 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p = 3h + 1),$$
$$x^4 + y^4 + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p = 4h + 1)$$

va en croissant avec le nombre p, il ajoute :

« En général, on pourrait démontrer que, étant donnée la congruence à deux inconnues $x^n + y^n + 1 \equiv 0$ (mod. p), on pourra toujours assigner une limite de p telle, que, passé cette limite, le nombre des solutions de cette congruence ira toujours en augmentant. Ce théorème n'est pas sans importance pour parvenir à la démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $u^n + v^n = z^n$ en nombres entiers, car il prouve que l'on tenterait en vain de démontrer cette impossibilité en voulant établir que, si cette équation était résoluble, l'une des inconnues serait divisible par une infinité de nombres premiers. Nous faisons cette observation parce que nous avons des motifs de croire que plusieurs analystes ont tenté ce genre de démonstration. »

» L'assertion de Libri est facile à justifier pour l'exposant 3. Si l'on désigne par α, α_1, α_2, ... les résidus cubiques du nombre $p = 3h + 1$ compris parmi les nombres 1, 2, 3, ..., $p - 1$, la congruence

$$(1) \qquad \alpha + \alpha_1 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

en supposant p premier, admet un nombre de solutions exprimé par la formule

$$(2) \qquad n = \frac{p + L - 8}{9},$$

où l'on désigne par L la racine positive ou négative du carré L^2 dans l'équation $4p = L^2 + 27M^2$. Or, à chaque solution de la congruence (1) correspondent neuf solutions de la congruence

$$(3) \qquad x^3 + y^3 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

On les obtient en combinant les trois solutions de la congruence $x^3 \equiv \alpha \pmod{p}$ avec les trois solutions de la congruence $x^3 \equiv \alpha_1 \pmod{p}$. Le nombre des solutions de la congruence $x^3 + y^3 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ en nombres entiers, positifs et inférieurs à p, est donc

$$(4) \qquad N = p + L - 8,$$

et le signe de L est déterminé par la formule $L \equiv 1 \pmod{3}$. Soit $p = 7$;

$$4 \times 7 = 1^2 + 27.1^2, \quad L = 1, \quad N = 0.$$

Soit $p = 13$;

$$4 \times 13 = 5^2 + 27.1^2, \quad L = -5, \quad N = 0.$$

Ainsi les deux nombres premiers 7 et 13 ne peuvent diviser la somme de trois cubes sans diviser l'un de ces cubes. Mais ils sont les seuls nombres premiers $3h + 1$ qui jouissent de cette propriété, car on a évidemment $L > -2\sqrt{p}$, $N > \sqrt{p}(\sqrt{p} - 2) - 8$, et le second membre de cette inégalité est positif à partir de $p = 19$. Si p est > 121, on a $N > 91$, et ce nombre croît en même temps que p.

» La formule (2), qui nous sert de fondement dans cette démonstration, est une conséquence immédiate de celles par lesquelles Gauss effectue le partage des racines de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$ en trois périodes (*D. A.*, art. 338).

Elle se trouve démontrée directement et de différentes manières dans mon Mémoire *Sur les résidus cubiques* (*Journal de Mathématiques de M. Resal*, t. II, p. 319) et dans une Note des *Comptes rendus* (t. LXXIX, p. 1407). »

SPECTROSCOPIE. — *Observation faite sur un groupe de raies dans le spectre solaire.* Note de M. L. **Thollon**, présentée par M. E. Mouchez.

« A la fin de l'hiver dernier, je me suis occupé d'organiser une installation pour les observations spectroscopiques sur la montagne où se construit actuellement le magnifique Observatoire de Nice. Mes études sur le Soleil, commencées vers le milieu de mai, se sont continuées jusqu'aux premiers jours de juillet. Bien que la saison ait été des plus défavorables, les résultat obtenus avec mon appareil à grande dispersion m'ont offert une sorte de compensation; ils seront exposés dans une prochaine Note. Pour le moment, je me bornerai à appeler l'attention de l'Académie sur une particularité fort remarquable que m'a présentée un groupe de quatre raies, situées dans l'orangé.

» La *fig.* 1 représente ce groupe tel qu'on le voit dans mon appareil le matin ou le soir, quand le centre de l'image solaire se trouve sur la fente. Les deux raies b, c appartiennent au fer. Leurs longueurs d'onde, déterminées par M. Thalén, sont

$$b = 5976,1,$$
$$c = 5974,6.$$

Les deux autres sont telluriques, et, d'après mes mesures, elles auraient pour longueurs d'onde

$$a = 5976,35,$$
$$d = 5974,36.$$

Les différences $a - b = 0,25$ et $c - d = 0,24$ représentent les intervalles ab et cd, qui sont presque égaux.

» Supposons maintenant qu'on déplace l'image solaire et que l'on amène sur la fente l'extrémité orientale de son diamètre équatorial; si le mouvement de la source lumineuse peut modifier la longueur d'onde des radiations qu'elle émet, il est évident que les raies du fer se déplaceront de gauche à droite, tandis que les raies telluriques conserveront une position invariable. Ce déplacement, facile à calculer, sera représenté par