JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 27, 237–253 (1979)

Sur le Problème de Goodman pour les Quadrangles et la Majoration des Nombres de Ramsey

GUY GIRAUD

Université de Provence, Place Victor-Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France

Communicated by the Editors

Received February 16, 1977

Dans cet article qui développe une Note (Giraud, G., *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **276** (1973), 1173–1175), nous prouvons que, pour n assez grand, tout bicoloriage des arètes de K_n contient une proportion de K_4 dont les six arêtes sont de même couleur au moins égale à $\frac{1}{46}$, et que si le nombre de triangles unicolores est minimal, cette proportion passe au moins à $(5 - 10^{1/2})/64$ à $O(n^{7/2})$ près. Nous exposons aussi une méthode de majoration des nombres de Ramsey binaires-bicolores qui fournit $\rho(6, 6) \leqslant 169$.

INTRODUCTION

Le nombre minimal de K_3 unicolores dans un bicoloriage des arêtes de K_n a été déterminé exactement par Goodman [6] (voir aussi Sauvé [9] et Lorden [8]; les apports respectifs sont précisés par Erdös en [2]). Quand n tend vers l'infini, on a min $M = \binom{n}{3}/4 + O(n^2)$, où M est le nombre de K_3 unicolores dans un coloriage, le minimum étant pris sur l'ensemble des coloriages.

Si Q désigne le nombre de K_4 unicolores, il a été conjecturé [8] que min $Q = \binom{n}{4}/32 + o(n^4)$. La moyenne de Q sur l'ensemble des coloriages est d'ailleurs $\binom{n}{4}/32$.

Il existe six coloriages des arêtes de K_4, à un isomorphisme près et à un échange des couleurs près. Nous désignons par Q, Y, Z', Z'', T', T'' les nombres de K_4 qui, dans un coloriage donné, sont colorés comme indiqué sur la Fig. 1 par leur graphe relatif à une des deux couleurs. Soit une arête α de

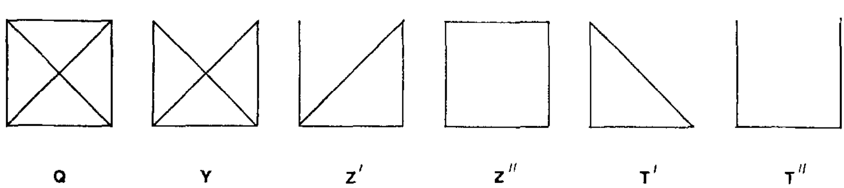

FIGURE 1

0095-8956/79/060237–17$02.00/0

K_n ; on désigne par m_α, b_α, c_α les nombres de triangles contenant α et respectivement unicolores, bicolores où α est seul de sa couleur, bicolores où un autre côté a la couleur de α. Nous pouvons former le système

$$\begin{array}{llllll}
\sum \binom{m_\alpha}{2} = 6Q + & Y & & & & \\
\sum m_\alpha b_\alpha = & & Z' & & +3T' & \\
\sum \binom{b_\alpha}{2} = & Y & & +2Z'' & & . \\
\sum m_\alpha c_\alpha = & 4Y + & 2Z' & & & \\
\sum b_\alpha c_\alpha = & & 2Z' & & & +4T''
\end{array} \qquad (1)$$

Ce système est de rang 5, et on ne peut former une nouvelle équation indépendante en utilisant c'_α et c''_α (Si $\alpha = \{i, j\}$, c'_α (resp. c''_α) est le nombre de triangles bicolores dont les 2 arêtes de même couleur, l'une étant α, passent par i (resp. j), d'où $c_\alpha = c'_\alpha + c''_\alpha$). D'ailleurs,

$$\sum m_\alpha b_\alpha = \sum \left[\binom{c_\alpha'}{2} + \binom{c_\alpha''}{2} \right].$$

Le système linéaire associé admet pour solutions

$$\frac{Q}{1} = \frac{-Y}{6} = \frac{Z'}{12} = \frac{Z''}{3} = \frac{-T'}{4} = \frac{-T''}{6},$$

les dénominateurs donnant les proportions des six familles de quadrangles dans la moyenne des coloriages.

En multipliant les équations respectivement par 2, 4, 6, 1, 3 et en additionnant, on obtient $Q + Y + Z' + Z'' + T' + T'' = \binom{n}{4}$.

Quadrangles Pairs et Impairs

Nous appelons quadrangles pairs les K_4 qui ont un nombre pair d'arêtes bleues, donc aussi d'arêtes rouges. Leur nombre est $Q + Z' + Z''$. Les autres seront les quadrangles impairs. Le seuil d'apparition d'un quadrangle pair est 6. En effet, dans le coloriage sur 5 points sans triangle unicolore, on a $T'' = 5$, et si les 15 quadrangles sur 6 points pouvaient être tous impairs, le nombre total A_b des arêtes bleues vérifierait $6A_b$ = somme de 15 nombres impairs (une arête appartenant à 6 quadrangles), ce qui est absurde. Additionnons les équations du système après les avoir multipliées respectivement par 62, 4, -6, -11 et 3. Nous obtenons, en posant $Z = Z' + Z''$ et $T = T' + T''$, B étant le nombre de triangles bicolores,

$$(Y + T - Q - Z) = -32Q + \frac{n-1}{4} B - \frac{11n+9}{4} M + \sum \frac{8m_\alpha^2 - (m_\alpha - b_\alpha)^2}{2}. \tag{2}$$

Si θ est un triangle quelconque, nous désignons par p_θ et q_θ les nombres respectifs de quadrangles pairs et impairs contenant θ. Nous avons donc $4(Q + Z) = \sum p_\theta$ et $4(Y + T) = \sum q_\theta$.

Soient $\theta \cup \{i\}$ et $\theta \cup \{j\}$ deux quadrangles de parités différentes, et soit $\alpha = \{i, j\}$. Les changements de couleur présentés par les trois paires d'arêtes passant respectivement par i et j et se coupant dans θ sont en nombre impair, et réciproquement si le nombre de changements de couleur est impair, les deux quadrangles sont de parités différentes.

Comptant de deux façons le nombre de paires de quadrangles de parités différentes et ayant un triangle commun, nous obtenons

$$\sum p_\theta q_\theta = \sum \left[\binom{c_\alpha}{3} + c_\alpha \binom{m_\alpha + b_\alpha}{2}\right]. \tag{3}$$

Cette identité peut s'écrire aussi sous la forme (3′) et, jointe à (2), permet une évaluation de Q.

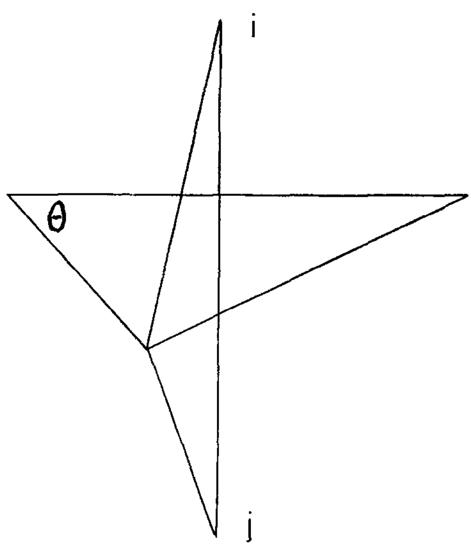

FIGURE 2

$$128Q = (n-1)\binom{n}{3} - (12n+8)\,M + 2\sum\,[8m_\alpha^2 - (m_\alpha - b_\alpha)^2]$$
$$+\sum\,(p_\theta - q_\theta), \tag{2'}$$

$$3\sum\,(p_\theta - q_\theta)^2 = (6n-17)\binom{n}{3} - (12n-32)\,M + \sum\,(n-2-2c_\alpha)^3. \tag{3'}$$

Minoration de $S = \sum\,[8m_\alpha^2 - (m_\alpha - b_\alpha)^2]$

Nous avons établi en [5] l'identité

$$\sum\,(2m_\alpha + c_\alpha)^2 + \sum\,(c'_\alpha - c''_\alpha)^2 = (12n-24)\,M + 4B. \tag{4}$$

Remplaçant $(m_\alpha - b_\alpha)^2$ par $(2m_\alpha + c_\alpha - n + 2)^2$, on obtient donc

$\sum\,(m_\alpha - b_\alpha)^2 \leqslant (3n-6)\,M - (n-6)\,B$, et par suite

$$s \geqslant 72M^2/\binom{n}{2} - (4n-12)\,M + (n-6)\binom{n}{3}\,. \tag{5}$$

Majoration de $S' = \sum\,(n-2-2c_\alpha)^3$

En vue d'une application à la majoration des nombres de Ramsey, nous allons supposer que le coloriage vérifie, pour toute arête, $\gamma' \leqslant c_\alpha \leqslant \gamma''$. D'une façon générale, on sait que $B \leqslant ((n-1)/4)\binom{n}{2}$, donc $\gamma' \leqslant (n-1)/2$. Si $\gamma' < (n-2)/2$, nous pouvons tracer, à partir du point de la cubique d'équation $y = (n-2-2c)^3$ qui a pour abscisse γ' une tangente qui la touche au point d'abscisse $c_0 = (3n-6-2\gamma')/4$. Si $2B/\binom{n}{2} \leqslant c_0 \leqslant \gamma''$, la convexité de la cubique montre que S' sera majorée en supposant que $c_\alpha = \gamma'$ ou c_0 pour toute arête, le fait que c_0 n'est pas nécessairement entier ne pouvant qu'augmenter le majorant.

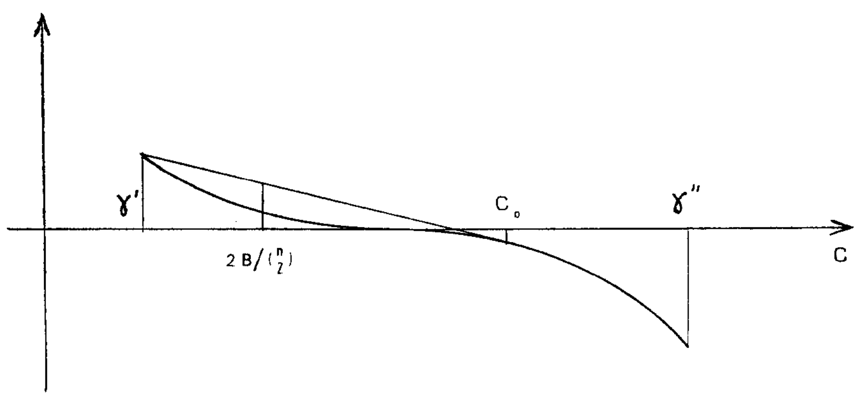

FIGURE 3

Majoration de $\rho\,(6, 6)$

$\rho\,(6, 6)$ désigne le seuil d'apparition d'une 6-clique dans le graphe bleu ou dans le graphe rouge de tout bicoloriage. Le tableau ci-dessous donne les meilleurs majorants connus de $\rho\,(p, q)$, les plus grands étant dûs à Walker [1, 10].

$p \backslash q$	3	4	5	6	7
3	6	9	14	18	23
4		18	28	44	66
5			55	94	156
6				178	322
7					626

Dans tout (6, 6)-coloriage des arêtes de K_n, on doit avoir en tout sommet i : $n - 94 \leqslant b_i, r_i \leqslant 93$, et en toute arête α: $m_\alpha \geqslant 43$ et $n - 138 \leqslant c'_\alpha \leqslant 54$ (b_i, r_i sont les nombres d'arêtes bleues, rouges passant par i). Nous prenons donc $\gamma' = 2n - 276$ et $\gamma'' = 108$. Nous avons d'autre part $(n-5)/4 \leqslant 3M/\binom{n}{2} \leqslant 43$ et $4Q \leqslant 17M$. La condition $\gamma' < (n-2)/2$ est réalisée puisque nous nous intéressons à $n \leqslant 177$. Nous avons $c_0 = (546 - n)/4 > 2B/\binom{n}{2}$. La condition $c_0 \leqslant \gamma''$ s'écrit $n \geqslant 114$. La minoration de S permet d'écrire (2) sous la forme

$$544M \geqslant 128Q \geqslant 144M^2\Big/\binom{n}{2} - (20n-16)\,M + (((3n-13)(n-2))/3)\binom{n}{2} + \sum (p_\theta - q_\theta),$$

et la tangente à la cubique au point d'abscisse c_0 permet de majorer S' selon

$$S' \leqslant -6(n-2-2c_0)^2\left(2B - \binom{n}{2}c_0\right) + \binom{n}{2}(n-2-2c_0)^3$$

$$= (550-3n)^2\left(3M - (n-138)\binom{n}{2}\right).$$

Pour $n = 169$, $S' \leqslant 5547M - 57319\binom{n}{2}$, d'où

$$\sum (p_\theta - q_\theta)^2 \leqslant \frac{3551}{3}M - \frac{5458}{9}\binom{n}{2}$$

et

$$544M \geqslant 144M^2\Big/\binom{n}{2} - 3364M + \frac{82498}{3}\binom{n}{2} + \sum (p_\theta - q_\theta).$$

De l'avant-dernière inégalité, puisqu'alors $\binom{n}{2} = (3/167)\binom{n}{3}$, il résulte que

$$\sum (p_\theta - q_\theta) \geqslant - \binom{n}{3}\left(\frac{3551}{167} M\Big/\binom{n}{2} - \frac{5458}{501}\right)^{1/2}.$$

Posant $x = M/\binom{n}{2}$, nous obtenons

$$144x^2 - 3908x + \frac{82498}{3} \leqslant \frac{167}{3}\left(\frac{3551}{167}x - \frac{5458}{501}\right)^{1/2}.$$

Dans l'intervalle $(41/3, 43/3)$ auquel appartient x, les deux membres de cette inégalité sont fonctions croissantes de x. Pour $x = 41/3$, le premier vaut 986 tandis que pour $x = 43/3$, le second vaut 954, 29... Il ne peut donc exister de (6, 6)-coloriage des arêtes de K_{169}, d'où la

PROPOSITION. *Tout bicoloriage des arêtes de K_{169} contient une 6-clique dans son graphe bleu ou dans son graphe rouge, c'est-à-dire* $\rho(6, 6) \leqslant 169$.

Cette méthode ne permet pas d'améliorer la majoration de $\rho(5, 5)$ indiquée dans le tableau. Par contre, tenant compte de $\rho(6, 6) \leqslant 169$, nous avons obtenu $\rho(7, 7) \leqslant 586$. L'utilisation du procédé en dehors de la diagonale du tableau apparaît possible mais pénible et d'efficacité réduite. Il serait cependant possible, vraisemblablement, d'améliorer $\rho(7, 6) \leqslant 322$, déjà donné par les inégalités de [3], peut-être même $\rho(5, 6) \leqslant 94$ également fourni par [3].

PARAMÈTRES RÉDUITS

Dans ce qui précède, les sommes S et S' ont été traitées indépendamment l'une de l'autre. Leur traitement simultané étant compliqué, et de peu d'influence sur la majoration des premiers nombres de Ramsey, nous allons l'ébaucher pour les grandes valeurs de n et en vue de minorer Q. Introduisons les paramètres réduits μ_α et δ_α définis par

$$\mu_\alpha = \frac{4m_\alpha}{n-2} - 1 \qquad \text{et} \qquad \delta_\alpha = \frac{2(m_\alpha - b_\alpha)}{n-2} = 2\left(\frac{2m_\alpha + c_\alpha}{n-2} - 1\right),$$

d'où

$$\mu_\alpha - \delta_\alpha = 1 - \frac{2c_\alpha}{n-2}.$$

Ces paramètres vérifient $2\delta_\alpha - \mu_\alpha \leqslant 1$, $\delta_\alpha - \mu_\alpha \geqslant -1$ et $\mu_\alpha \geqslant -1$, ainsi que $2 \sum \mu_\alpha = 3 \sum \delta_\alpha$.

D'autre part, l'identité (4) fournit

$$\sum \delta_\alpha^2 \leqslant \frac{4}{3}\sum \mu_\alpha + \frac{4}{n-2}\sum (\delta_\alpha + 1 - \mu_\alpha) = \frac{4}{3}\sum \mu_\alpha + O(n). \qquad (4')$$

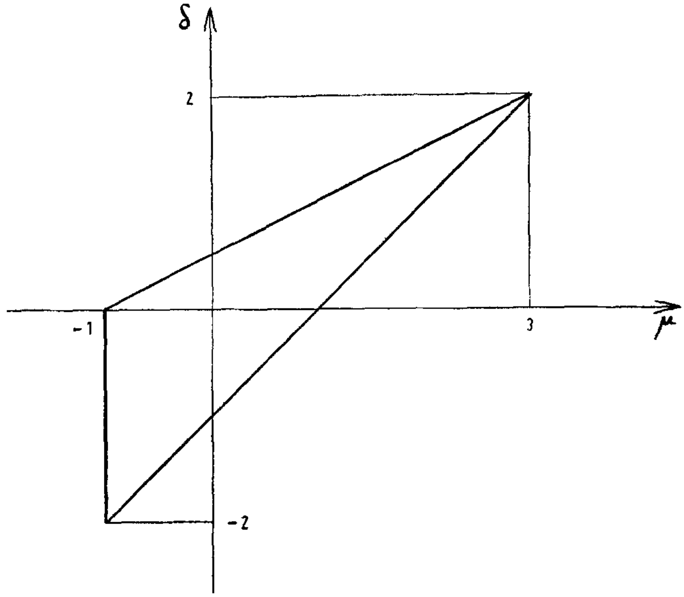

FIGURE 4

On en tire $2S \geqslant 12\binom{n}{4} + \frac{4}{3}n^2 \sum \mu_\alpha + n^2 \sum {\mu_\alpha}^2 + O(n^3)$, puis $\sum (p_\theta - q_\theta)^2 = (n^3/3) \sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3 + O(n^4)$, et enfin

$$\frac{32Q - \binom{n}{4}}{\binom{n}{4}} \geqslant \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum \mu_\alpha + \frac{3}{\binom{n}{2}} \sum {\mu_\alpha}^2 - \left(\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3 + O(n^{-1})\right)^{1/2}. \quad (6)$$

Tirons-en de suite deux conséquences.

Posons $M' = M/\binom{n}{3}$, $B' = B/\binom{n}{3}$ et $Q' = Q/\binom{n}{4}$. Posons aussi $s = \sum \mu_\alpha/\binom{n}{2}$, d'où $\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)/\binom{n}{2} = s/3$. La convexité de la cubique d'équation $y = x^3$ nous montre que $\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3/\binom{n}{2} \leqslant \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)/\binom{n}{2} = (1 + s)/4$ (voir Fig. 5). Puisque $s = 3M' - B' \geqslant -3/(n-2)$, l'inégalité (6) montre que

$$32Q' - 1 \geqslant s + 3s^2 - (1 + s + O(n^{-1}))^{1/2}/2.$$

Donc pour $s \geqslant -3/25$, en particulier pour $n \geqslant 27$, on peut écrire

$$32Q' - 1 + O(n^{-1}) \geqslant s + 3s^2 - (1 + s)^{1/2}/2,$$

où le second membre est fonction croissante de s. Il en résulte que

$$32Q' - 1 \geqslant -\tfrac{1}{2} + O(n^{-1}),$$

d'où la

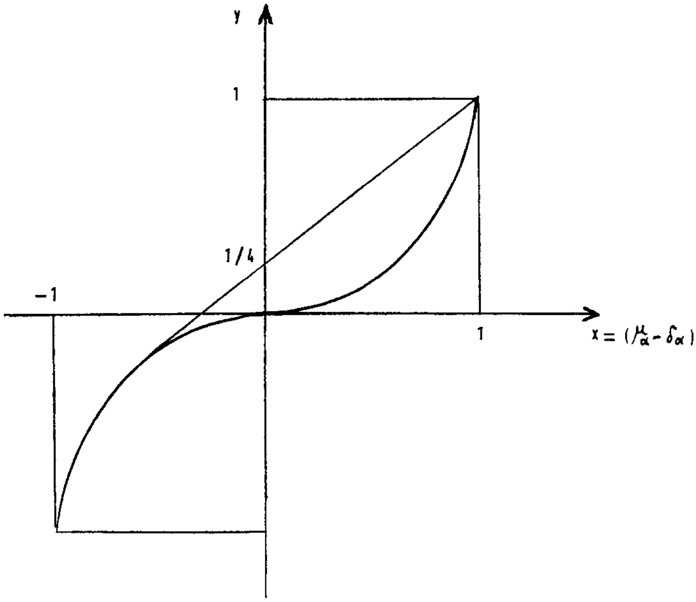

FIGURE 5

PROPOSITION. *Pour tout bicoloriage des arêtes de K_n, le nombre Q de K_4 unicolores vérifie* $Q \geqslant \frac{1}{64}\binom{n}{4} + O(n^3)$,

et le

LEMME. *Pour n assez grand,* $s \geqslant 1/5$ *entraîne* $Q' > 1/42$.

MINORATION DE Q DANS LE CAS OU $M' \leqslant \frac{1}{4}$

Dans ce cas, $s = O(n^{-1})$. On en tire $\sum \delta_\alpha^2/\binom{n}{2} = O(n^{-1})$ puis, comme $\sum \mu_\alpha^2 = O(n^2)$, et que $|\sum \mu_\alpha \delta_\alpha| \leqslant (\sum \mu_\alpha^2)^{1/2} \times (\sum \delta_\alpha^2)^{1/2}$, on obtient $\sum \mu_\alpha \delta_\alpha = O(n^{3/2})$. Ainsi $\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^2 = \sum \mu_\alpha^2 + O(n^{3/2})$. Posons $p = \sum \mu_\alpha^2/\binom{n}{2}$, sans confusion à craindre avec p_θ, et $r = \sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^2/\binom{n}{2}$. Cette quantité vérifie donc $r = p + O(n^{-1/2})$, et l'inégalité (6) fournit

$$32Q' - 1 \geqslant 3p - \left(\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3 \Big/ \binom{n}{2} + O(n^{-1})\right)^{1/2}.$$

Majorons $\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3/\binom{n}{2}$ en supposant connus, en dehors de n, s et r.

LEMME. *Soient trois réels compris entre* -1 *et* 1, *dont la somme ainsi que la somme des carrés sont données. Le maximum de la somme de leurs cubes est obtenu quand les deux plus petits sont égaux ou quand le plus grand vaut* 1.

Preuve. Soient σ_1, σ_2, σ_3 les fonctions symétriques fondamentales de ces trois nombres, racines de l'équation $x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$. Sont donnés σ_1 et $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$, et il faut maximiser $\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_2\sigma_1 + 3\sigma_3$, donc σ_3. On est ramené à un problème résolu (voir [5]).

Permettons aux $\binom{n}{2}$ nombres $(\mu_\alpha - \delta_\alpha)$ de prendre des valeurs réelles quelconques entre -1 et 1. Chaque fois que nous en avons trois strictement inférieurs à 1 et dont les deux plus petits sont différents, nous pouvons, en conservant leur somme et la somme de leurs carrés, les modifier pour augmenter la somme de leurs cubes. Il s'agit de maximiser une fonction continue définie sur une partie fermée de $[-1, 1]^{\binom{n}{2}}$. Le maximum existe donc et est atteint. Au maximum, il est impossible, d'après ce qui précède, que les $(\mu_\alpha - \delta_\alpha)$ prennent plus de deux valeurs différentes de 1 et que la plus grande de deux telles valeurs soit prise plus d'une fois. Nous avons donc à considérer les distributions

$$\binom{n}{2}\binom{s/3}{r} = A'\binom{1}{1} + A''\binom{x''}{x''^2} + A'''\binom{x'''}{x'''^2},$$

avec $A''' = 0$ ou 1, et $A' + A'' + A''' = \binom{n}{2}$.

Nous voyons donc que $\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3 \leqslant A' + A''x''^3 + 1$. Du système,

$$\begin{aligned} A' + A'' &= \binom{n}{2} + O(1) \\ A' + A''x'' &= O(n) \qquad\qquad , \\ A' + A''x''^2 &= \binom{n}{2} p + O(n^{3/2}) \end{aligned}$$

on tire, à $O(n^{-1/2})$ près,

$$x'' = -p, \qquad A'/\tbinom{n}{2} = p/(1+p), \qquad \text{et} \qquad A''/\tbinom{n}{2} = 1/(1+p),$$

d'où

$$\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3 \Big/ \binom{n}{2} \leqslant p(1-p) + O(n^{-1/2}),$$

d'où

$$32Q' - 1 \geqslant 3p - (p(1-p) + O(n^{-1/2}))^{1/2}.$$

Or $3p - (p(1-p))^{1/2}$ est minimal pour $p = (10 - 90^{1/2})/20 = 0,0256....$ Donc, pour $p \geqslant 5.10^{-3}$, $32Q' - 1 \geqslant 3p - (p(1-p))^{1/2} + O(n^{-1/2})$ le cas où p est voisin de 1 s'écartant facilement, d'où $32Q' - 1 \geqslant (3 - 10^{1/2})/2 + O(n^{-1/2}) = -0,081... + O(n^{-1/2})$. Si $p < 5.10^{-3}$, on peut écrire, pour n assez grand, $32Q' - 1 \geqslant 3p - (6.10^{-3})^{1/2} \geqslant -0,078$. On aboutit ainsi à la

PROPOSITION. *Pour tout bicoloriage des arêtes de K_n où moins d'un quart des triangles sont unicolores, le nombre Q de K_4 unicolores est minoré selon*

$$Q \geqslant (5 - 10^{1/2})\binom{n}{4}\Big/64 + O(n^{7/2}).$$

Ainsi, pour n assez grand, $Q' > (34, 83)^{-1}$.

Pour les coloriages de Greenwood et Gleason, qui entrent dans cette catégorie, Blanchard, utilisant les théorèmes de Hasse [7] et Weil [11], a calculé (communication orale) le nombre de K_c unicolores qu'il a trouvé égal à $\binom{n}{c}/(2^{\binom{c}{2}-1}) + O(n^{c-1/2})$. Pour $c = 4$, on trouve ainsi $\binom{n}{4}/32 + O(n^{7/2})$; notre minorant ne peut donc être beaucoup amélioré.

Pour ces coloriages, notre méthode fournit aussi, puisque $\mu_\alpha = O(n^{-1})$ et $\delta_\alpha = O(n^{-1})$, le résultat $32Q' - 1 = O(n^{-1/2})$. Plus précisément, l'incertitude sur Q y est donnée par $| 32Q' - 1 | \leqslant (1 + o(1))/n^{1/2}$, ce qui est deux fois meilleur que ce que donne le théorème de Hasse, dont l'avantage est constitué par le fait qu'il donne une estimation du nombre de K_4 unicolores passant par tout K_3.

Soit en effet F_n (corps fini où n, congru à 1 (mod 4), est une puissance d'un nombre premier) l'ensemble des sommets de K_n, et $\mu = \{0, 1, a\}$ (à ne pas confondre avec le paramètre μ_α) un triangle unicolore quand les arêtes sont colorées selon la méthode de Greenwood et Gleason (a et $a - 1$ sont donc des carrés). Les $x \in F_n$ qui sont sommets de K_4 pairs passant par μ sont caractérisés par l'existence de $y \in F_n$, non nul, tel que $x(x - 1)(x - a) = y^2$. Le premier membre n'ayant pas de racine double, le nombre N des solutions $\binom{x}{y}$ de cette équation vérifie $| N - n | \leqslant 2n^{1/2}$ [7]. Désignons par q_μ, y'_μ, z'_μ, t'_μ les nombres de K_4 passant par μ et qui ont respectivement 3, 2, 1, 0 arêtes ayant la couleur (bleue) de μ (voir Fig. 1). Ces paramètres vérifient le système

$$\left.\begin{array}{llll} q_\mu & & + z'_\mu & = (N-3)/2 \\ 3q_\mu & + 2y_\mu & + z'_\mu & = 3(n-5)/2 \\ 3q_\mu & + 1y_\mu & & = 3(n-9)/4 \\ & & z'_\mu + 3t'_\mu & = 3(n-1)/4 \end{array}\right\} \text{ dont la seconde équation}$$

s'obtient en comptant les arêtes bleues passant par les sommets de μ, la troisième en comptant les triangles bleus passant par les côtés de μ et la dernière en comptant les triangles ayant deux côtés rouges et le 3$^{\text{e}}$ dans μ. Puisque $q_\mu + y_\mu + z'_\mu + t'_\mu = n - 3$, ce qui résulte d'ailleurs des trois dernières équations, on en tire $q_\mu = (N - 15)/8$, d'où $| 32Q' - 1 | \leqslant (2 + o(1))/n^{1/2}$.

UNE MINORATION DE Q DANS LE CAS GÉNÉRAL

Eu égard aux résultats précédents, nous supposons désormais $0 \leqslant s \leqslant 0,2$. Du système

$$\begin{aligned} A' + A'' &= \binom{n}{2} + O(1) \\ A' + A''x'' &= \binom{n}{2} s/3 + O(1), \\ A' + A''x''^2 &= \binom{n}{2} r + O(1) \end{aligned}$$

on tire, à $O(n^{-2})$ près

$$x'' = \frac{3r - s}{s - 3}, \quad A' \Big/ \binom{n}{2} = \frac{9r - s^2}{9r - 6s + 9}, \quad \text{et} \quad A'' \Big/ \binom{n}{2} = \frac{(3 - s)^2}{9r - 6s + 9},$$

et on en déduit

$$\sum (\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3 \Big/ \binom{n}{2} \leqslant \frac{-9r^2 + (9 + 3s)\, r - s^2}{9 - 3s} + O(n^{-2}).$$

D'autre part, $\sum \delta_\alpha{}^2/\binom{n}{2} \leqslant 4s/3 + O(n^{-1})$ entraîne

$$\left| \sum \mu_\alpha \delta_\alpha \Big/ \binom{n}{2} \right| \leqslant 2(p(s/3 + O(n^{-1})))^{1/2}.$$

On en déduit

$$r \leqslant (2(s/3)^{1/2} + p^{1/2})^2 + O(n^{-1/2}), \tag{7}$$

et il vient

$$\begin{aligned} 32Q' - 1 &\geqslant s + 3p - (D/(9 - 3s))^{1/2} + O(n^{-1/2}), \\ D &= (9 + 3s)\, r - 9r^2 - s^2. \end{aligned} \tag{6'}$$

A s et p donnés, $s + 3p - (D/(9 - 3s))^{1/2}$ est fonction décroissante de r tant que $r \leqslant (3 + s)/6$; on le minore donc,

(a) si $(2(s/3)^{1/2} + p^{1/2})^2 \geqslant (3 + s)/6$, en prenant $r = (3 + s)/6$. Ensuite, on minore p par $(((3 + s)/6)^{1/2} - 2(s/3)^{1/2})^2$ qui, pour $s < 0,2$, est supérieur à s^2 comme il se doit. Il vient, à $O(n^{-1/2})$ près,

$$32Q' - 1 \geqslant (11s + 3)/2 - 4((3s + s^2)/2)^{1/2} - (1 + s)^{1/2}/2;$$

le second membre est fonction convexe décroissante de s, ce qui donne $32Q' - 1 \geqslant -0,2104... + O(n^{-1/2})$ pour $s = 0,2$,

(b) sinon, en donnant à r sa plus grande valeur permise par (7). Alors, $p = r + 4s/3 - 4(rs/3)^{1/2} + O(n^{-1/4})$, et il vient

$$
\begin{aligned}
32Q' - 1 &\geqslant U + O(n^{-1/4}) \\
U &= E - (D/(9-3s))^{1/2} \\
E &= 5s + 3r - 12(rs/3)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{6''}
$$

La plus petite valeur de U que nous ayons obtenue, correspondant à $Q'^{-1} = 45, 753...$, est $-0, 30059...$; elle est donnée par $s = 0, 119$ et $r = (2(s/3)^{1/2} + s)^2$. Des valeurs de Q' inférieures sont à chercher nécessairement dans ce second cas.

Dans le plan des $\binom{s}{r}$, les courbes $E = Cte$ sont des arcs d'ellipses homothétiques dans des homothéties de centre $\binom{0}{0}$, tangentes aux axes, centrées en $E/6\ \binom{3}{5}$, les points où la tangente est parallèle à l'axe des s vérifiant $r = 25s/12$ (ou $r = 0$).

Les courbes $D = Cte$ sont des ellipses homothétiques dans des homothéties de centre $\frac{1}{2}\binom{3}{2}$, qui est aussi leur centre commun, dont les points les plus "bas" à tangente parallèle à l'axe des s vérifient $r = 2s/3$. En effet, $D = 3 - 3(1-s)^2/4 - (3r - (3+s)/2)^2$. Nous allons établir que le système

$$
\begin{gathered}
(2(s/3)^{1/2} + s)^2 \leqslant r \leqslant (3+s)/6 \\
0 \leqslant s \leqslant 0, 2
\end{gathered} \tag{8}
$$

entraîne $U > -7/23$, et donc $Q' < 1/46$.

La Fig. 6 représente la région définie par le système ci-dessus.

La droite $r = 25s/12$ coupe la courbe $r = (2(s/3)^{1/2} + s)^2$ pour $s = 1/12$. Ajoutons que cette dernière courbe est convexe et vérifie $r \geqslant 4s/3$. Dans la région à explorer, D est inférieur à la valeur qu'il prend en $\binom{1/5}{16/30}$, soit 2, 52. Donc, la condition $U > -7/23$ y est réalisée dès que

$$E > (2, 52/8, 4)^{1/2} - 7/23 = E_1 = 0, 2434 \text{ par excès.}$$

Or l'arc $E = E_1$ coupe l'arc $r = (2(s/3)^{1/2} + s)^2$ en un point où s est racine de $3s^2 + s = E_1$, plus précisément en le point où

$$s = s_1 = ((12E_1 + 1)^{1/2} - 1)/6 = 0, 1634 \text{ par excès.}$$

Cette valeur étant supérieure à $1/12$, il est clair que, dans la région restant à explorer, où $E \leqslant E_1$, D sera majoré par la valeur qu'il prend en $\binom{0,1634}{0,3972}$. Ceci explique la méthode que nous allons utiliser pour restreindre de plus en plus la région douteuse (voir Fig. 6).

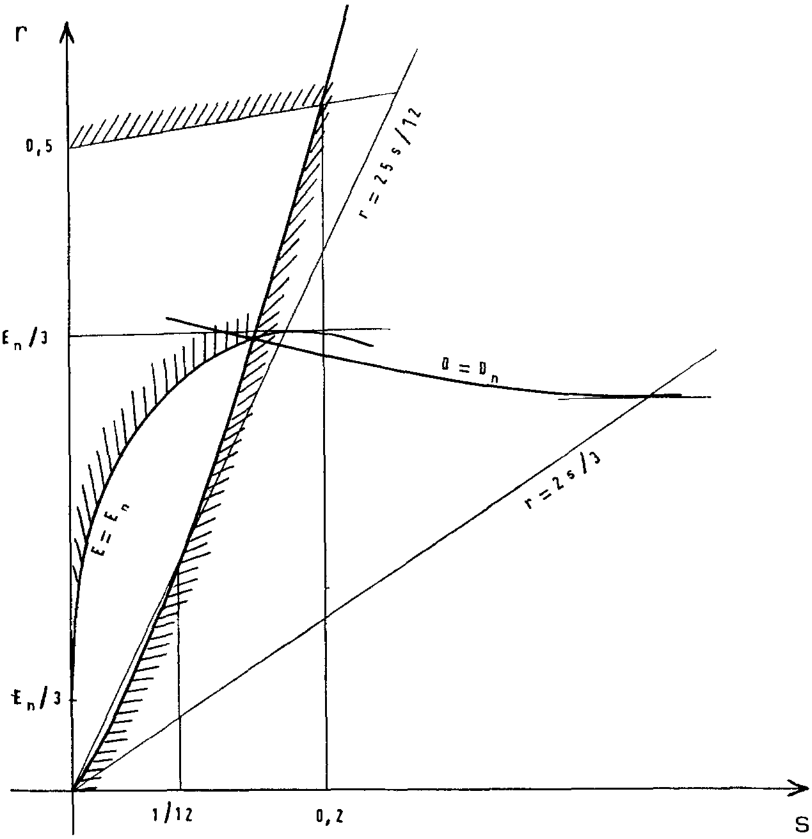

FIGURE 6

Les calculs qui figurent sur le Tableau 1 ont été effectués à la calculatrice HP 35. Les formules utilisées sont

$$s_n = ((12E_n + 1)^{1/2} - 1)/6, \qquad r_n = (2(s_n/3)^{1/2} + s_n)^2,$$
$$D_n = (9 + 3s_n)\, r_n - 9{r_n}^2 - {s_n}^2 \quad \text{et} \quad E_{n+1} = (D_n/(9 - 3s_n))^{1/2} - 7/23.$$

D_n y est fonction croissante de s_n et de r_n, et E_{n+1} de D_n et de s_n, ce qui justifie que les résultats soient donnés par excès.

Pour les opérations qui interviennent, le constructeur garantit le résultat avec une erreur maximale de ± 1 sur le dixième chiffre significatif. Dans nos calculs successifs, nous supposons systématiquement que les valeurs qui figurent sur le tableau sont exactes pour la suite des calculs; il en résulte que, dans toute l'étendue du tableau, les résultats de la machine sont exacts à

$\pm 10^{-8}$ près. Nous les arrondissons par excès en leur donnant quatre décimales, ce qui, en l'occurrence, couvre l'erreur précédente.

La méthode tombe en défaut dès que $s_n < 1/12$, car la position relative des tangentes au courbes $E = E_n$ et $D = D_n$ en leur point d'intersection $\binom{s_n}{r_n}$ n'est plus évidente.

Reste alors la possibilité que U soit inférieur à $-7/23$ quand $E \leqslant E_{21} = 0,0917$. Supposons que s reste inférieur à 0, 1, donc que $9 - 3s > 8,7$. La condition $U > -7/23$ sera alors réalisée si $-(D/8,7)^{1/2} > -7/23$, donc si $D < 0,8058$ par défaut. Mais, à son tour (voir Fig. 7) cette condition est

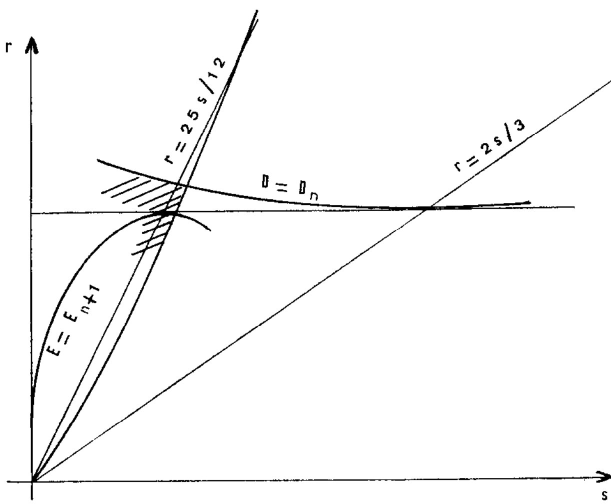

FIGURE 7

réalisée dès que $r \leqslant 2(1 - (1 - 0,8058/3)^{1/2})/3 = 0,0965...,$ condition elle-même conséquence de $E \leqslant 0,6(0,0965...) = 0,0579$ par défaut. Reste ainsi à considérer le cas où $0,0579 < E \leqslant 0,0917$. Mais alors, $U > -7/23$ résulte de $0,0579 - (D/8,7)^{1/2} > -7/23$. Ainsi se trouve expliquée la méthode utilisée pour construire le tableau II. Les formules utilisées sont

$$D_n = 8,7(E_n + 7/23)^2 \qquad \text{et} \qquad E_{n+1} = 0,4(1 - (1 - D_n/3)^{1/2}).$$

Dans toute l'étendue du tableau, l'erreur due à la machine est au plus égale à $\pm 10^{-8}$. Nous avons arrondi les résultats par défaut en leur laissant quatre décimales, la diminution étant à chaque fois $> 10^{-8}$. Chaque résultat figurant sur le tableau a ensuite été supposé exact pour la suite des calculs. Enfin, l'examen du Tableau I montre que l'hypothèse $9 - 3s > 8,7$ a été constamment respectée. Nous venons ainsi de montrer que $U \leqslant -7/23$ exige

TABLE I

n	E_n	s_n	r_n	D_n
1	0,2434	0,1634	0,3972	2,3229
2	0,2182	0,1504	0,3579	2,2072
3	0,2038	0,1428	0,3355	2,1298
4	0,1942	0,1375	0,3200	2,0715
5	0,1868	0,1335	0,3085	2,0257
6	0,1810	0,1302	0,2991	1,9867
7	0,1761	0,1275	0,2914	1,9536
8	0,1718	0,1250	0,2844	1,9227
9	0,1678	0,1227	0,2780	1,8938
10	0,1641	0.1206	0,2721	1,8665
11	0,1605	0,1185	0,2263	1,8391
12	0,1569	0,1164	0,2605	1,8112
13	0,1533	0,1142	0,2545	1,7818
14	0,1494	0,1119	0,2482	1,7502
15	0,1451	0,1093	0,2412	1,7144
16	0,1403	0,1064	0,2334	1,6736
17	0,1348	0,1030	0,2243	1,6247
18	0,1281	0,0989	0,2135	1,5649
19	0,1197	0,0935	0,1995	1,4846
20	0,1083	0,0861	0,1806	1,3711
21	0,0917	0,0749		

TABLEAU II

n	E_n	D_n
0	0	0,8058
1	0,0579	1,1416
2	0,0851	1,3195
3	0,1006	

$0,1006 < E \leqslant 0,0917$. Le minimum de U sur le compact défini par (8) est bien $> -7/23$. Il faut maintenant introduire les conditions (voir Fig. 8)

$$\begin{gathered} (2(s/3)^{1/2} + s)^2 \leqslant r + O(n^{-1/4}) \leqslant (3 + s)/6 \\ 0 \leqslant s \leqslant 0,2 \end{gathered} \tag{8'}$$

On a toujours $D < 0,8058 \Rightarrow U > -7/23$, pour n assez grand. On peut ajouter alors une nouvelle condition: $r \geqslant 0,0965$. Mais alors, $\partial U/\partial r$ est borné. Par suite, le minimum de U sur le compact défini par (8′) sera encore $>$ $-7/23$, à condition de choisir n assez grand. Enfin, en choisissant encore n

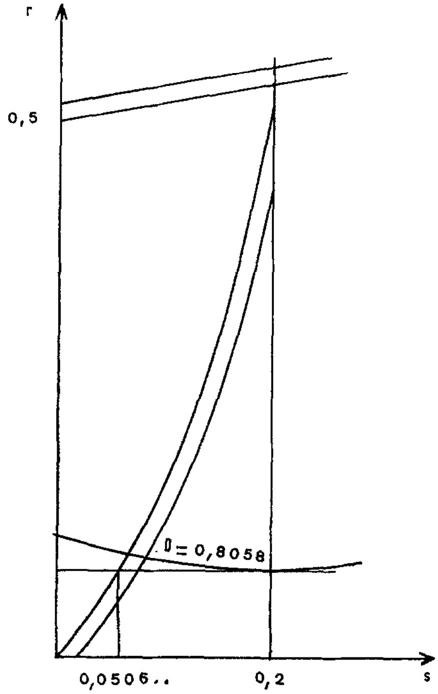

FIGURE 8

assez grand, (6″) montre que, pour tous les coloriages, $32Q' - 1 > -7/23$. On établit ainsi la

PROPOSITION. *Pour tout bicoloriage des arêtes de K_n, le nombre Q de quadrangles unicolores est minoré, pour n assez grand, selon*

$$Q > \frac{1}{46}\binom{n}{4}.$$

Remarque. Le minorant de Q' fourni par le minimum de U dans la région définie par (8) n'a aucune chance d'être le minimum asymptotique de Q' sur l'ensemble des coloriages car l'égalité utilisée $\left|\sum \mu_\alpha \delta_\alpha / \binom{n}{2}\right| = 2(ps/3)^{1/2}$ suppose colinéaires les deux matrices-colonnes dont les $\binom{n}{2}$ composantes sont les μ_α et les δ_α, suppose donc que les $\binom{n}{2}$ points $\binom{\mu_\alpha}{\delta_\alpha}$ sont alignés sur une droite passant par l'origine dont l'équation ne peut-être que $\delta = 2\mu/3$, ce qui est contredit par le fait que certains doivent être sur la droite $\mu - \delta = 1$ et d'autres sur la droite $\mu - \delta = x'' = (s - 3r)/(3 - s) < 0$. Nous avons obtenu une distribution asymptotique des $\binom{\delta_\alpha}{\mu_\alpha}$, à savoir

$$\sum \binom{\mu_\alpha}{\delta_\alpha} \Big/ \binom{n}{2} = \binom{s}{2s/3} = 0{,}17435 \binom{0{,}3415}{-0{,}6585} + 0{,}82565 \binom{0{,}0284}{0{,}2061}$$

approximativement, pour laquelle $s = 0,083$ et $p = 0,021$, vérifiant les conditions précédemment écrites (en particulier, les $\binom{\delta_\alpha}{\mu_\alpha}$ appartiennent au triangle fermé de la Fig. 4), qui donne $s + 3p - (\sum(\mu_\alpha - \delta_\alpha)^3/\binom{n}{2})^{1/2} = -0,2659\ldots$ Une analyse plus poussée, ne s'appuyant que sur ces diverses conditions, ne permettrait donc pas d'améliorer beaucoup notre minoration de Q'.

Il serait intéressant de savoir si cette distribution correspond à la limite d'une suite de coloriages; pour ceux-ci, Q' pourrait tendre alors vers $(1 - 0,2659)/32 = (43,59)^{-1}$ approximativement, ou du moins vers une limite $< (32)^{-1}$.

REFERENCES

1. L. COMTET, Analyse Combinatoire, Coll. SUP, P.U.F., 1970.
2. P. ERDÖS, On the number of complete subgraphs contained in certains graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci., VII, Ser. A* **3** (1962), 459–464.
3. G. GIRAUD, Nouvelles majorations des nombres de Ramsey binaires-bicolores, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **268** (1969), 5–7.
4. G. GIRAUD, Une minoration du nombre de quadrangles unicolores et son application à la majoration des nombres de Ramsey binaires-bicolores, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **276** (1973), 1173–1175.
5. G. GIRAUD, Sur les proportions respectives de triangles uni, bi ou tricolores dans un tricoloriage des arêtes du n-emble, *Discrete Math.* **16** (1976), 13–38.
6. A. W. GOODMAN, On sets of acquaintances and strangers at any party, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 778–783.
7. H. HASSE, Abstrakte Begründung der komplexen Multiplikation und Riemannsche Vermutung in Funktionenkörpern, *Abh. Math. Sem. Hamburg* **10** (1934), 325–348.
8. G. LORDEN, Blue-empty chromatic graphs, *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 114–120.
9. L. SAUVÊ, On chromatic graphs, *Amer. Math. Monthly* **68** (1961), 107–111.
10. K. WALKER, An upper bound for the Ramsey number M(5, 4), *J. Combinatorial Theory Ser. A* **11** (1971), 1–10.
11. A. WEIL, Riemann hypothesis in function fields, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **27** (1941), 345–347.