Borrower: UMC

Lending String: ZQM,*DGU,TXC,ZGM,WTU

Patron:

Journal Title: Mathematische Nachrichten.

Volume: 6 **Issue:**
Month/Year: 1951 **Pages:** 261-262

Article Author:

Article Title: Witt; Ein Kombinatorischer Satz de Elementargeometrie

Imprint: Weinheim, Wiley-VCH

ILL Number: 35007881

Call #: No Call Number

Location: RIGGS Storage v. 1(1948)-20(1959),33(1967)-79(1977)

ARIEL
Charge
Maxcost: 25.00IFM

Shipping Address:
University of Maryland
McKeldin Library - ILL
1 Library Lane
College Park, MD 20742-7011

Fax: 301-314-9416
Ariel: 129.2.17.58

c. Die Residuen der Greenschen Resolvente.

In den Fällen, wo im x-Intervall $\langle a,\, b\rangle$ entweder stets $g(x) > 0$ oder stets $g(x) < 0$ ist, kann man durch die Variablentransformation (57) also Anschluß gewinnen an die Theorie der Fredholmschen Integralgleichungen. Man erhält dann[1]), daß die Anzahl der Summenglieder in der möglichst weit reduzierten Bilinearform des Residuums $c_1^{(i)}(x,\xi)$ der Greenschen Resolvente $G(\lambda;\, x,\, \xi) = \mp\overline{G}(\lambda;\, z(x),\, \zeta(\xi))$ von (6), (7) gleich der Vielfachheit der Nullstelle ist, die die zum Kern $\overline{G}(\lambda_0;\, z,\, \zeta) = \mp G(\lambda_0;\, x,\, \xi)$ gehörige Fredholmsche Determinante

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varkappa_\nu}{\nu!}(\lambda-\lambda_0)^\nu \tag{63}$$

mit

$$\varkappa_\nu = \int\limits_a^b \cdots \int\limits_a^b \begin{vmatrix} G(\lambda_0;\, t_1,\, t_1) & \dots & G(\lambda_0;\, t_1,\, t_\nu) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ G(\lambda_0;\, t_\nu,\, t_1) & \dots & G(\lambda_0;\, t_\nu,\, t_\nu) \end{vmatrix} g(t_1)\cdots g(t_\nu)\, dt_1 \cdots dt_\nu$$

an der Stelle $\lambda = \lambda_i$ hat; die Nullstellen dieser Determinante erweisen sich ja (abgesehen von ihrer Vielfachheit) als identisch mit den Nullstellen der charakteristischen Determinante $\Delta(\lambda)$. Die bisherigen Betrachtungen lieferten nur, daß diese Anzahl höchstens $2l$ beträgt, wo l die Vielfachheit der Nullstelle von $\Delta(\lambda)$ bei $\lambda = \lambda_i$ ist.

Ferner ergibt die Theorie der Integralgleichungen, daß dann die Funktionensysteme der $F_\nu^{(i),1}(x)$ und $\Phi_\nu^{(i),1}(\xi)$ von (46) zueinander biorthogonal sind, d. h. den Beziehungen

$$\int\limits_a^b F_\mu^{(i),1}(x)\,\Phi_\nu^{(i),1}(x)\,g(x)\,dx = \delta'_{\mu\nu} \qquad (\delta_{\mu\nu} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu,\ \delta_{\nu\nu} = 1) \tag{64}$$

genügen.

Literatur.

[1] A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik II: Mechanik der deformierbaren Medien. Leipzig 1945.
[2] R. v. Mises, Weber-Festschrift. Leipzig 1912, S. 252—282.
[3] W. M. Whyburn, Trans. Amer. math. Soc. **30**, 630—640 (1928).
[4] E. Kamke, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3. Aufl., Leipzig 1944.
[5] L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1949.
[6] E. Hölder, Math. Z., Berlin **31**, 197—257 (1929).
[7] G. Kowalewski, Integralgleichungen. Berlin 1930.

[1]) Kowalewski [7], S. 230.

Ein kombinatorischer Satz der Elementargeometrie.

Von Ernst Witt in Hamburg.

(Eingegangen am 21. 9. 1951.)

Im ersten Kapitel des lesenswerten Büchleins „Drei Perlen der Zahlentheorie" bringt der Verfasser A. J. Chintschin[1]) einen Beweis von M. A. Lukomskaja[2]) zu folgendem Satz von van der Waerden[3]):

Bei beliebiger Einteilung eines genügend großen Abschnittes natürlicher Zahlen in höchstens k Klassen befindet sich in mindestens einer Klasse eine arithmetische Progression vorgeschriebener Länge l [4]).

Chintschin beschließt das Kapitel mit den Worten: „Es ist übrigens nicht ausgeschlossen, daß der Satz von van der Waerden einen noch einfacheren Beweis zuläßt, und alles Suchen in dieser Richtung kann nur begrüßt werden." Dies war die Veranlassung, nach einer neuen Beweisanordnung zu suchen, die dann gleich zu einer allgemeineren Fassung des Problems führte.

1. Für eine vorgelegte natürliche Zahl k und für eine Ausgangsfigur $\mathfrak{E}_l$ aus endlich vielen verschiedenen komplexen Zahlen $e_1, \dots, e_l$ $(e_1 = 0)$ mit ihren homothetischen Bildern

$$\mathfrak{E}'_l = \lambda\mathfrak{E}_l + a \qquad (\lambda = 1, 2, \dots;\ a \text{ beliebig})$$

gilt folgender

Satz: *Bei beliebiger Einteilung einer geeigneten endlichen Menge $\mathfrak{X}$ von komplexen Zahlen in höchsten k Klassen enthält mindestens eine Klasse eine zu $\mathfrak{E}_l$ homothetische Figur $\mathfrak{E}'_l$.*

Dabei wird $\mathfrak{X}$ für genügend großes N aus allen Linearkombinationen

$$x = \sum x_h e_h \qquad \left(\sum x_h = N;\ x_h = 0, 1, \dots\right)$$

bestehen. (Beispielsweise reicht im Falle $l = 3$, $k = 2$ die Zahl $N = 4$ aus, wie eine direkte Diskussion unter Ausnutzung aller Symmetrien ergibt.)

Statt für komplexe Zahlen läßt sich der Satz auch in irgendeinem Modul der Charakteristik 0 aussprechen.

[1]) A. J. Chintschin, Drei Perlen der Zahlentheorie. Herausgegeben vom Forschungsinstitut für Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin 1951, S. 9—14.

[2]) Nachträglich sehe ich, daß es sich inhaltlich um eine Wiedergabe des ursprünglichen Beweises (vgl. Fußnote 3) handelt, allerdings mit viel komplizierterer Bezeichnungsweise.

[3]) B. L. van der Waerden, Beweis einer Baudetschen Vermutung. Nieuw Arch. Wiskunde, 2. Reeks **15** (1928), 212—216.

[4]) Die Vermutung, daß die Verallgemeinerung von $k = 2$ auf beliebiges k für die Induktion vorteilhaft sein könnte, stammt von Herrn E. Artin.

2. Die Klassen denken wir uns durch verschiedene Farben gekennzeichnet und behaupten dann entsprechend das Vorkommen einer einfarbigen Figur $\mathfrak{E}_l'$ in $\mathfrak{X}$. Zur Erleichterung des Beweises sollen die Endpunkte e_1'', e_l'' einer in $\mathfrak{X}$ gelegenen, zu $\mathfrak{E}_l$ homothetischen Figur $\mathfrak{E}_l''$ *verbunden* heißen, wenn wenigstens die aus $e_1'', \ldots, e_{l-1}''$ bestehende Teilfigur $\mathfrak{E}_{l-1}''$ einfarbig ist. Dabei ist die Farbe $f(e_l'')$ ganz gleichgültig. Nun gilt folgender

Hilfssatz: *Eine geeignete endliche Menge $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(l, k, n)$ von komplexen Zahlen enthält bei beliebiger Färbung $f(x)$ in höchstens k Farben eine Folge von paarweise verbundenen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ $(l, n \geqq 2)$.*

Hier stellt also jedes Paar a_i, a_j $(i < j)$ die Endpunkte einer in $\mathfrak{X}$ gelegenen fast einfarbigen Figur $a_i + \lambda_{ij}\mathfrak{E}_l$ dar mit höchstens einem Farbfehler bei a_j [1].

3. Beweis des Hilfssatzes durch doppelte Induktion.

Zur Durchführung des Schlusses $n \to n+1$ denken wir schon

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(l, k, n) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(l, K, 2)$$

konstruiert für festes l, n und alle k, K. Wir setzen jetzt

$K =$ Anzahl der Färbungsmöglichkeiten von $\mathfrak{X}$ in höchstens k Farben

und betrachten die aus allen Summen $x + y$ bestehende Menge $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$, die wir uns irgendwie in höchstens k Farben gefärbt vorstellen wollen.

Nach Induktionsannahme über $\mathfrak{Y}$ gibt es unter den Parallelmengen $\mathfrak{X} + y$, die bezüglich ihrer Farbenverteilung höchstens K verschiedenen Typen angehören, ein in dieser Hinsicht verbundenes Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{A} + \mu e_l$, also mit

$$f(a) = f(a + \mu e_h) \qquad (a \text{ beliebig aus } \mathfrak{A},\ h < l).$$

Nach Induktionsannahme über $\mathfrak{X}$ enthält die Parallelmenge $\mathfrak{A}$ hinsichtlich ihrer Färbung eine Folge $a_1, \ldots, a_n$ von paarweise verbundenen Zahlen. Setzen wir insbesondere $a_n = a_i + \lambda_i e_l$ (ausnahmsweise $\lambda_n = 0$), so folgt

$$f(a_i) = f(a_i + \lambda_i e_h) = f(a_i + \lambda_i e_h + \mu e_h) \qquad (h < l).$$

Hiernach ist auch die mit $a_i + \lambda_i e_l + \mu e_l = a_n + \mu e_l$ verlängerte Folge

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_n + \mu e_l$$

bezüglich der Färbung von $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$ paarweise verbunden.

Ausgehend von $\mathfrak{X}(l, k, 2)$ für alle k läßt sich also $\mathfrak{X}(l, k, n)$ konstruieren. Im Falle $n = k + 1$ gibt es hier nach dem Schubfachprinzip in einer Folge von paarweise verbundenen Zahlen $a_1, \ldots, a_{k+1}$ mindestens 2 Zahlen gleicher Farbe, die dann Anfang und Ende eines wirklich einfarbigen Bildes $\mathfrak{E}_l'$ von $\mathfrak{E}_l$ sind.

Für den Schluß $l \to l+1$, den wir mit $\mathfrak{X}(2, k, 2) = \mathfrak{E}_2$ beginnen lassen, setzen wir $\mathfrak{X}(l+1, k, 2)$ gleich der Vereinigungsmenge derjenigen homothetischen Bilder $\mathfrak{E}_{l+1}^*$ von $\mathfrak{E}_{l+1}$, für welche die Teilfigur $\mathfrak{E}_l^*$ in $\mathfrak{X}(l, k, k+1)$ liegt.

Damit ist dann der Hilfssatz und mit $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(l, k, k+1)$ auch der Satz bewiesen.

[1]) Zur besseren Anschaulichkeit kann man sich eine in einem Hofe $\mathfrak{X}$ aufgespannte Leine vorstellen, an der an Klammern a_i ähnlich geformte Wäschestücke $\mathfrak{E}_l'$ hängen, von denen jedes Stück für sich bis auf einen etwaigen Farbfehler am rechten Ende e_l' einfarbig ist. Allerdings trägt dabei jede Klammer $n-1$ Wäschestücke.

Über approximative Funktionalgleichungen der Potenzen der Riemannschen Zetafunktion.[1])

Von Rudolf Wiebelitz in Köln.

(Eingegangen am 24. 9. 1951.)

Hardy und Littlewood [1, 2][2]) stellten 1921 die sogenannte approximative Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ auf, durch die $\zeta(s)$ im kritischen Streifen[3]) $0 \leqq \sigma \leqq 1$ und benachbarten Teilen der komplexen Zahlenebene bis auf ein Restglied von geringer Ordnung durch leicht zu übersehende Funktionen dargestellt wird:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leqq x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leqq y} n^{-1+s} + O(x^{-\sigma}),$$

wobei $\chi(s)$ die Funktion $2^s \pi^{s-1} \sin \frac{1}{2}\pi s\, \Gamma(1-s)$ bedeutet und $x \cdot y = \frac{|t|}{2\pi}$ ist. Eine entsprechende approximative Funktionalgleichung bewiesen sie wenig später [3] auch für $\zeta^2(s)$. Dabei wird allerdings $x \cdot y = \left(\frac{|t|}{2\pi}\right)^2$ und das Restglied $O\left(x^{\frac{1}{2}-\sigma}\left(\frac{x+y}{|t|}\right)^{\frac{1}{4}} \log|t|\right)$. Gestützt auf die von Hardy und Littlewood angewandte Methode werden in der vorliegenden Arbeit entsprechende Gleichungen für $\zeta^k(s)$ $(k \geqq 3)$ aufgestellt.

Satz 1. *Unter der Voraussetzung*

$$\text{(1)} \qquad \zeta(\tfrac{1}{2} + it) = O(|t|^c) \qquad (0 < c \leqq \tfrac{1}{6})$$

gilt für festes ganzzahliges $k \geqq 3$, $x \cdot y = \left(\frac{|t|}{2\pi}\right)^k$, $x > A$, $y > A$ [4]) gleichmäßig im Streifen $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \zeta^k(s) = {} & \sum_{n \leqq x} d_k(n)\, n^{-s} + \chi^k(s) \sum_{n \leqq y} d_k(n)\, n^{s-1} - R_x(s) - \chi^k(s)\, R_y(s) \\ & + O\left(x^{\frac{1}{2}-\sigma} \sqrt{x+y}\, |t|^{-\beta} \log^{k-1}|t|\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}-\sigma}(x+y)^{2\beta c \frac{k-4}{k} + \varepsilon}\right) \\ & + O\left(x^{\frac{1}{2}-\sigma} |t|^{(k-2)c} \log^2|t|\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}-\sigma} \min(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})\, |t|^{-2}\right).^{5)} \end{aligned}$$

[1]) Diss. Köln 1949 (gekürzte Wiedergabe); Referenten: Prof. Dr. Guido Hoheisel, Prof. Dr. Karl Dörge.

[2]) Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis S. 270.

[3]) $s = \sigma + it$.

[4]) Die A sind positive Konstanten, nicht notwendig immer dieselben.

[5]) ε bedeutet stets einen beliebig kleinen festen positiven Wert, der nicht notwendig in allen Formeln die gleiche Größe haben muß. $d_k(n)$ ist die Anzahl der Zerlegungsmöglichkeiten von n in k positive ganzzahlige Faktoren, wobei Zerlegungen mit denselben Faktoren in verschiedener Reihenfolge als verschieden angesehen werden.